DM n°2 : Calcul, complexes – Corrigé

Exercice 1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1) $\cos^2 x = \dfrac{1}{2}$

$$\begin{aligned}
\cos^2 x = \frac{1}{2} &\iff \frac{1+\cos(2x)}{2} = \frac{1}{2} \\
&\iff 1+\cos(2x) = 1 \\
&\iff \cos(2x) = 0 = \cos\frac{\pi}{2} \\
&\iff 2x \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi] \text{ ou } 2x \equiv -\frac{\pi}{2} [2\pi] \\
&\iff 2x \equiv \frac{\pi}{2} [\pi] \\
&\iff x \equiv \frac{\pi}{4} \left[\frac{\pi}{2}\right]
\end{aligned}$$

Finalement,

$$\boxed{\mathcal{S} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}}$$

2) $\sin x \cos x \geq -\dfrac{1}{2}$

$$\begin{aligned}
\sin x \cos x \geq -\frac{1}{2} &\iff 2\sin x \cos x \geq -1 \\
&\iff \sin(2x) \geq -1
\end{aligned}$$

Or, cette dernière assertion est toujours vraie. Ainsi, $\boxed{\mathcal{S} = \mathbb{R}}$.

Exercice 2. On note $\mathbb{U}_5$ l'ensemble de racines cinquièmes de 1 dans $\mathbb{C}$.

1) Décrire explicitement $\mathbb{U}_5$ (i.e. donner tous ses éléments). Montrer que la somme de ses éléments est nulle.

$$\mathbb{U}_5 = \left\{1, e^{\frac{2i\pi}{5}}, e^{\frac{4i\pi}{5}}, e^{\frac{6i\pi}{5}}, e^{\frac{8i\pi}{5}}\right\}$$

On a donc

$$\sum_{z\in\mathbb{U}_5} z = \sum_{k=0}^{4} e^{\frac{2ik\pi}{5}} = \frac{1-\left(e^{\frac{2i\pi}{5}}\right)^5}{1-e^{\frac{2i\pi}{5}}} \qquad \text{car } e^{\frac{2i\pi}{5}} \neq 1$$

Or,

$$1-\left(e^{\frac{2i\pi}{5}}\right)^5 = 1-e^{\frac{10i\pi}{5}} = 1-e^{2i\pi} = 1-1 = 0$$

On en déduit que $\boxed{\displaystyle\sum_{z\in\mathbb{U}_5} z = 0}$

2) En déduire l'égalité $1 + 2\cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right) + 2\cos\left(\dfrac{4\pi}{5}\right) = 0$.

Par la question précédente,

$$\begin{aligned}0 &= 1 + e^{\frac{2i\pi}{5}} + e^{\frac{4i\pi}{5}} + e^{\frac{6i\pi}{5}} + e^{\frac{8i\pi}{5}}\\ &= 1 + e^{\frac{2i\pi}{5}} + e^{\frac{4i\pi}{5}} + e^{-\frac{4i\pi}{5}} + e^{-\frac{2i\pi}{5}}\\ &= 1 + 2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + 2\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)\end{aligned}$$

d'où le résultat.

3) Rappeler, pour tout réel x, la formule donnant $\cos(2x)$ en fonction de $\cos x$.

$$\boxed{\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1}$$

4) Déduire des questions précédentes que $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ est solution d'une équation algébrique de degré 2. La résoudre et montrer que $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$.

Par la question 2,

$$\begin{aligned}0 &= 1 + 2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + 2\cos\left(2\times\frac{2\pi}{5}\right)\\ &= 1 + 2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + 2\left(2\cos^2\left(\frac{2\pi}{5}\right) - 1\right) \qquad \text{par la question 3}\\ &= -1 + 2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + 4\cos^2\left(\frac{2\pi}{5}\right)\end{aligned}$$

On voit ainsi que $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ est solution de l'équation $4x^2 + 2x - 1 = 0$.

Déterminons les solutions de cette équation. Le discriminant du polynôme est

$$\Delta = 4 + 4\times 4 = 20 > 0$$

Il y a donc deux racines réelles :

$$x_1 = \frac{-2-\sqrt{20}}{8} \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{-2+\sqrt{20}}{8}$$

On a donc $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) \in \{x_1, x_2\}$. Or, comme $0 < \frac{2\pi}{5} < \frac{\pi}{2}$, on a nécessairement $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) > 0$. Puisque $x_1 < 0$, cela implique que

$$\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = x_2 = \frac{-2+2\sqrt{5}}{8} = \boxed{\frac{\sqrt{5}-1}{4}}$$

5) Déduire des questions précédentes la valeur de $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$.

Par ce qui précède, on a

$$\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{5}-1}{4} = \cos\left(2\times\frac{\pi}{5}\right) = 2\cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right) - 1$$

Ainsi, en posant $x = \cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$, on a

$$2x^2 - 1 = \frac{\sqrt{5}-1}{4} \qquad \Longleftrightarrow \qquad x^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4} + 1\right) = \frac{\sqrt{5}+3}{8}$$

Or, $x > 0$ car $0 < \frac{\pi}{5} < \frac{\pi}{2}$. Ainsi, en passant à la racine,

$$x = \boxed{\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \sqrt{\frac{\sqrt{5}+3}{8}}}$$